Title	規数線形束の諸性質 I
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 2(6) p.168-p.175
Issue Date	1947-08-29
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75197
rights	
Note	

62. 規数線形束の諸性質 I

中野秀五郎

規数線形束 即ち Birkhoff の Lattice Theory における Banach lattice は Kantorovitch: Lineare halbgeordnete Raume. Rec. Math. Moskow 2 (1937) 121–165 にて初めて考へられ，正則なる性質を中心として色々な空間が考へられた。著者はかねて規数線形束の分類を志し，其性質の分析を与へた。今後の研究の便宜上 今迄に得た断片的に発表し，或は数年来東大セミナーに於ける講義にて得た結果の一部を次にまとめて記すこととする。簡単の為文献は，(B)としては以上の Birkhoff の本 又(K)としては，以上の Kantorovitch の論文 尚又著者の論文には次の記号を使用する。

(1) Teilweise geordnete Algebra 数学輯報 17. (1941) 425-511

(2) Stetige lineare Funktionale auf dem teilweise geordneten Modul. 東大紀要 4. (1942) 201–382.

(3) Riesz Fischerer Satz im normierten teilweise geordneten Modul. 学士院 18. (1942) 350–353.

(4) Über die Stetigkeit des normierten teilweise 学士院 19. (1943) 10–11.

(5) Über ein lineares Funktional auf dem teilweise geordneten Modul 学士院 18. (1942) 548–552

(6) Über Erweiterungen von allgemeinen teilweise-geordneten Moduln. I　　学士院 18(1941) 626-630

(7) 同 II.　　学士院 19(1943)　138-143.

§1. 連續 線形 束空間の性質

此処では $\mathfrak{M}$ は連續なる線形束 即ち 任意の可附番個の正要素列 a_ν に對し $\bigcap a_\nu$ が存在するものとする．又収斂は皆 order 収斂の意味とする。

1) 汎連續： 正要素系 $a_\lambda \geqq 0$ $(\lambda \in \Lambda)$ に對し $\bigcap_\lambda a_\lambda$ が存在する。

2) 超汎連續： 正要素系 a_λ に對し $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} a_{\lambda_\nu} = \bigcap_\lambda a_\lambda$ が 列 $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \cdots$ が含まれる。

3) 完全： $a_\nu \frown a_\mu = 0$ $(\nu \neq \mu)$ なる $a_1 a_2, \cdots\cdots$ に對し $\bigcup_\nu a_\nu$ が存在する。

4) 汎完全： $a_\lambda \frown a_\mu = 0.$ $(\lambda \neq \mu)$ なる a_λ に對し $\bigcup_\lambda a_\lambda$ が存在する。

(以上(1)参照)

5) 係数完備： $a_\nu \geqq 0$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ に對し $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu a_\nu$ が収斂なる正数列 α_ν が存在する。

6) 直交係数完備： $a_\nu \frown a_\mu = 0$ $(\nu \neq \mu)$ に對し $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu a_\nu$ が収斂なる正数列 α_ν が存在する。

7) 非有界： $a_\nu \geqq 0$ にして $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ が収斂 ならば, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu a_\nu$ が収斂にして $\lim_{\nu \to \infty} \alpha_\nu = +\infty$ なる正数列 α_ν が存在する。

8) 直交非有界： $a_\nu \frown a_\mu = 0$ $(\nu \neq \mu)$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ が収斂ならば $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu a_\nu$ が収斂 $\lim_{\nu \to \infty} \alpha_\nu = +\infty$ なる正数列 α_ν が存在する。((7)参照).

9) 一様連續： $a_\nu \downarrow 0$ ならば, $a_\nu \leqq \varepsilon_\nu l$, $\varepsilon_\nu \downarrow 0$, $l \geqq 0$ なる ε_ν, l が存在する。(K)

10) 直交一様連續： $a_\nu \frown a_\mu = 0$, $\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = 0$ ならば $a_\nu \leqq \varepsilon_\nu l$, $\varepsilon_\nu \downarrow 0$, $l \geqq 0$.

11) 正則完備： 二重列 $a_{\nu,1} \geqq a_{\nu,2} \geqq \cdots\cdots \to 0$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ に對し $l \geqq a_{\nu,\mu_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ なる μ_ν 及び l が存在する。((5) 参照.)

(K)における"正則"とは、正則完備且超沢連続なることである。

以上の性質の間の関係として、明かなることは、2)→1), 4)→3), 3)→6),
3)→8, 5)→6), 7)→8), 9)→10)が成立する。

<u>定理</u>　非有界と一様連続とは同等である。

証明. $\mathfrak{M}$ が非有界とすれば、$a_\nu \downarrow 0$ に対し $\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu - a_{\nu+1})$ は収斂なるを以て $l = \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu(a_\nu - a_{\nu+1})$, $\alpha_\nu \uparrow +\infty$ なる正数列 α_ν が存在し 此 l に対し、$a_\nu \leqq \frac{1}{\alpha_\nu} l$ が成立する。逆に $\mathfrak{M}$ が一様連続なるときは $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ が収斂にして $a_\nu \geqq 0$ なるときは $b_\nu = a_\nu + a_{\nu+1} + \cdots$ に対し $b_\nu \downarrow 0$ なるへきを以て、$b_\nu \leqq \varepsilon_\nu l$, $\varepsilon_\nu \downarrow 0$ が成立し、$\varepsilon_{\nu_\mu} \leqq \frac{1}{2^\mu}$ なる ν_μ に対し $\sum_\mu b_{\nu_\mu}$ が収斂なるを以て、$\mathfrak{M}$ が非有界なることが知られる。同様にして次の定理が証明される。

<u>定理</u>　直交非有界と直交一様連続とは同等である。

<u>定理</u>　正則完備は一様連続且係数完備と同等である。

証明. $\mathfrak{M}$ が正則完備なるときは、$a_\nu \geqq 0$ に対し $\frac{1}{2^\mu} a_\nu \downarrow_\mu 0$ なるを以て、$l \geqq \frac{1}{2^{\mu_\nu}} a_\nu$ なる μ_ν が存在し、従って $\sum_\nu \frac{1}{2^{\mu_\nu+\nu}} a_\nu$ は収斂である。
又 $a_\nu \downarrow 0$ に対し、$\mu a_\nu \downarrow_\nu 0$ ($\mu = 1, 2, \cdots$) なるを以て $l \geqq \mu a_{\nu_\mu}$ ($\mu = 1, 2, \cdots$) なる ν_μ が存在し、従って $\mathfrak{M}$ が一様連続となる。逆に $\mathfrak{M}$ が係数完備且一様連続とすれば、$a_{\nu,\mu} \downarrow_\nu 0$ ($\mu = 1, 2 \cdots$) に対し、$\varepsilon_\nu l_\mu \geqq a_{\nu,\mu}$ $\varepsilon_\nu \downarrow 0$ にして、且 $\sum \alpha_\mu l_\mu$ 収斂なるを以て、$\alpha_\mu > \varepsilon_{\nu_\mu}$ に対し $\sum \alpha_\mu l_\mu \geqq a_{\nu_\mu,\mu}$ が成立する。

§2 規数線形束空間の性質

線形束 $\mathfrak{M}$ に規数 $\|a\|$ が定義せられ、

1) $\|a\| \geqq 0$, $\|a\|$ が定義せられ、

2) $\|\alpha a\| = |\alpha|\,\|a\|$,

3) $\|a + b\| \leqq \|a\| + \|b\|$

4) $|a| \leqq |b|$ ならば $\|a\| \leqq \|b\|$

が満足されてあるとする。特に、

5°) $|a| \leqq |b|$, $\|a\| = \|b\|$ ならば $|a| = |b|$

が満足されるときは、此規数は増加規数であると云ふこととする。次に $\mathfrak{M}$ は連続線形束として次の定義を設ける。

1) 半連続規数： $0 \leqq a_\nu \uparrow a$ ならば $\|a_\nu\| \uparrow \|a\|$,

2) 汎半連続規数： $a_\lambda \geqq 0$, $a = \bigcup_\lambda a_\lambda$ ならば $\sup \|a_{\lambda_1} \cup \cdots \cup a_{\lambda_\nu}\| = \|a\|$

3) 連続規数： $a_\nu \downarrow 0$ ならば $\|a_\nu\| \downarrow 0$.

4) 完備規数： a_ν が Cauchy sequence ならば $\lim_{\nu \to \infty} \|a_\nu - a\| = 0$

なる a が存在する。

5) 単調完備規数： $0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots$ にして $\sup \|a_\nu\| < +\infty$ ならば、$a_\nu \leqq a$

なる a が存在する。

6) 汎単調完備規数： $a_\lambda \geqq 0$ にして、$\sup \|a_{\lambda_1} \cup \cdots \cup a_{\lambda_\nu}\| < +\infty$ ならば

$a_\lambda \leqq$ なる a が存在する。

先づ明かに 2) → 1) 6) → 5) が成立する。

定理 規数が半連続且単調完備なるときは此規数は完備である。此定理は既に前論文（Refexive vector lattice の norm に就て）にて書いた。

定理 規数が連続ならば、$\mathfrak{M}$ は超汎連続にして且つ汎半連続規数である。連続規数から $\mathfrak{M}$ の超汎連続の出ることは (4) にて証明されてゐる。又汎半連続規数となることは、同様にして証明されることが (7) に注意されてゐる。即ち $a = \bigcup_\lambda a_\lambda$ にして任意の a_{λ_1} a_{λ_2} に対し $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2} \leqq a_{\lambda_3}$ なる a_{λ_3} が存在すると仮定する。

$$\|a_\nu - a_{\nu-1}\| \geqq \sup_{a_\lambda \geqq a_{\nu-1}} \|a_\lambda - a_{\nu-1}\| - \frac{1}{2^\nu} \qquad a_\nu \geqq a_{\nu-1}$$

なるが如く a_λ に属する a_ν を定めるときは、$\bigcup a_\nu = a_0$ に対し任意の a_λ 及び $a_\lambda \cup a_\mu \leqq a_\alpha$, $\mu \geqq \nu$ に対し

$$\|(a_\lambda \cup a_\mu) - a_0\| \leqq \|(a_\lambda \cup a_\nu) - a_\nu\| \leqq \|a_\beta - a_\nu\| \leqq \|a_0 - a_\nu\| + \frac{1}{2^{\nu+1}}$$

より $\|(a_\lambda \cup a_0) - a_0\| = 0$ が得られる。従って $a_\lambda \cup a_0 = a_0$ 即ち $a_\lambda \leqq a_0$ より $a = a_0$ が得られる。同様にして次の定理が証明される。

定理. 連続規数且単調完備規数ならば、汎単調完備規数である。

定理 半連続規数且増加規数ならば、$\mathfrak{M}$ は超汎連続である。

証明: $a_\lambda \geqq 0$, $\bigcup_\lambda a_\lambda = a$ なるときは $a_\nu = a_{\lambda_1\nu} \cup \cdots \cup a_{\lambda_\nu\nu}$ $a_\nu \uparrow a_0$, $\|a_\nu\| \uparrow \|a\|$ なるが如く a_ν が選べる. 然るときは $0 \leqq a_0 \leqq a$, $\|a_0\| = \|a\|$ より $a_0 = a$ が証明される.

同様にして次の定理が証明される。

<u>定理</u>　規数が半連続、増加且単調完備ならば、汎単調完備である。

<u>定理</u>　無限次元を完全なる $\mathfrak{M}$ は規数を有さない。

証明: $a_\nu \frown a_\mu = 0$ $(\nu \neq \mu)$ に対し, $l = \sum_\nu \frac{2^\nu}{\|a_\nu\|} a_\nu$ と置くときは $\|l\| \geqq 2^\nu$ となつて矛盾する.

$\mathfrak{M}$ に於ける任意の要素 p への<u>射影子</u>を $[p]$ にて表はすこととする。(11) 参照) 然るときは、半連続，及び連続規数に関し次の定理が成立する.

<u>定理</u>　$a \geqq 0$, $[p_\nu] \uparrow [p]$ に対し $\|[p_\nu]a\| \uparrow \|[p]a\|$ ならば半連続規数である。

<u>定理</u>　$a \geqq 0$, $[p_\nu] \downarrow [0]$ に対し $\|[p_\nu]a\| \downarrow 0$ ならば連続規数である.

証明は 2 参照.

<u>定理</u>　$\lim_{\nu\to\infty} \|a_\nu - a\| = 0$, $a_\nu \geqq 0$ にして, $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots$ 或は $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$ ならば $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ である.

より次の定理が得られる.

<u>定理</u>　完備規数ならば $\mathfrak{M}$ は係数完備である. 如何とならば, $a_\nu \geqq 0$ に対し $\sum_\nu \frac{1}{2^\nu \|a_\nu\|} a_\nu$ は収斂する.

<u>定理</u>　直交一様連続ならば 連続規数である. 如何となれば $a \geqq 0$, $[p_\nu] \downarrow [0]$ に対し $\varepsilon_\nu l \geqq [p_\nu]a$, $\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0$ なるべきを以て $\|[p_\nu]a\| \leqq \varepsilon_\nu \|l\|$ が成立する.

<u>定理</u>　規数が連続且完備なるときは $\mathfrak{M}$ は正則完備である.

証明: $a_{\nu,1} \geqq a_{\nu,2} \geqq \cdots 0$ なるときは $\sum_\nu \|a_{\nu,\mu_\nu}\|$ が収斂する μ_ν が得られ、従つて $\sum_\nu a_{\nu,\mu_\nu} \geqq a_{\nu,\mu_\nu}$ である。

<u>定義</u>　任意の正数 γ, ε に対し 正数 δ を適当に定めるとき, $\|a\| \leqq \gamma$, $\|b\| \geqq \varepsilon$ ならば、$\|a+b\| \geqq \|a\| + \delta$ なるとき 此規数は<u>一様増加</u>と云ふ.

<u>定理</u>　規数が一様増加且半連続ならば 此規数は単調である.

証明： $a \geqq 0$, $[p_\nu] \downarrow 0$ に対し $\|[p_\nu]a\| \geqq \varepsilon$ であるとすれば 適当な正数 δ に対し $\|a\| \geqq \|([a]-[p_\nu])a\|+\delta$. 故に $\nu \to \infty$ に対し $\|a\| \geqq \|a\|+\delta$ となつて矛盾する.

定理　規数が一様増加且完備なるときは 此規数は連続且汎単調完備である.

証明は(2)を参照されたい.

注意： 完備でない規数を考えることは必要である. 例へば Banach の(M)空間は (L)空間の部分空間と考へることにより (M)空間が超汎連続なることが知られる.

§3 収　斂

連続線形束 $\mathfrak{M}$ に於ける収斂は所謂 ordere convergence である. 即ち $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ とは $|a_\nu - a| \leqq l_\nu$, $l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots$, $\bigcap_\nu l_\nu = 0$ なる l_ν の存在することである. 次に他の収斂を定義する.

1) 個別収斂： 任意の $c_1 \leqq c_2$ に対し $\lim_{\nu\to\infty} (a_\nu \frown c_2)^\smile c_1 = (a \frown c_2)^\smile c_1$ なるとき, a_ν は a に個別収斂数と云ひ, $ind\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ にて表はす.

これは D-convergence と一致する. 即ち $\mathfrak{M}$ を含む完全線形束の中にての odere convergence と一致する. ((1) 参照)

定理. $ind\cdot\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ なる為の必要且充分なる條件は, 任意の射影子 $[p]$ に対し $[p_\mu] \uparrow [p]$, $\lim_{\nu\to\infty} [p_\mu] a_\nu = [p_\mu] a$ なる $[p_\mu]$ の存在することである.

証明は Semi-ordered linear space に於ける個別 ergode 定理として "数学" に発表することとなつてゐる. 又此定理より $ind\text{-}\lim_\nu a_\nu = a$, $ind\text{-}\lim_{\nu\to\infty} b_\nu = b$ より $ind\text{-}\lim (a_\nu + b_\nu) = a + b$, $ind\text{-}\lim (a_\nu \overset{\smile}{\frown} b_\nu) = a \overset{\smile}{\frown} b$ 等一般に order convergence に関して成立する性質が得られる.

2) 星収斂： a_ν の任意の部分列は $\lim_{\nu\to\infty} a_{\mu_\nu} = a$ なる部分列 a_{μ_ν} を含むとき, a_ν は a に星収斂すると云ひ, $s\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ と記す. ((K)参照)

3) 星個別収斂： a_ν の任意の部分列が $ind\cdot\lim_{\nu\to\infty} a_{\mu_\nu} = a$ なる部分なり

a_{μ_ν}を含むことで $S\text{-}ind\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$にて表はすこととする.

定理 規数が半連続にして, $\lim_{\nu\to\infty}\|a_\nu - a\| = 0$ ならば. $S\text{-}ind\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$である.

証明: a_ν の任意の部分列より $\|a_{\mu_\nu} - a\| \leqq \frac{1}{2^\nu}$ なる a_{μ_ν} を選び 任意の $c \geqq 0$に対し $b_\nu = \lim_{\rho\to\infty}(|a_{\mu_\nu} - a| + \cdots\cdots |a_{\mu_\rho} - a|) \frown c$ と置くときは. $\|b_\nu\| \leqq \frac{1}{2^{\nu-1}}$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots\cdots$ より $\lim_{\nu\to\infty} b_\nu = 0$が 得られる. 従つて $ind\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_{\mu_\nu} = a$である.

同様にして 次の定理が証明される.

定理 規数が完備にして, $\lim_{\nu\to\infty}\|a_\nu - a\| = 0$ならば $S\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ である.

定理 規数が半連続にして, $S\text{-}ind\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ ならば $\varliminf_{\nu\to\infty}\|a_\nu\| \geqq \|a\|$.

証明: $\varliminf_{\nu\to\infty}\|a_\nu\| < \|a\|$ $ind\text{-}\lim|a_\nu| = |a|$とすれば $b_\nu = |a_\nu| \frown |a_{\nu+1}| \frown \cdots$ に対して $b_\nu \uparrow |a|$ なるべきを以て $\lim_{\nu\to\infty}\|b_\nu\| = \|a\|$ にして 然かも $\|a_\nu\| \geqq \|b_\nu\|$となりこ矛盾する.

又次の二定理は殆んど明かである.

定理 規数が連続にして, $S\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ならば $\lim_{\nu\to\infty}\|a_\nu - a\| = 0$.

定理 規数が連続にして $S\text{-}ind\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ にして, 然かも $[p_\mu] \downarrow [0]$ に対し $\|[p_\mu]a_\nu\|$ が $\mu\to\infty$ に対し一様にОに収斂すれば $\lim_{\nu\to\infty}\|a_\nu - a\| = 0$

定理 規数が完備且一様単調なるとき $S\text{-}ind\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$, $\lim_{\nu\to\infty}\|a_\nu\| = \|a\|$ ならば $\lim_{\nu\to\infty}\|a_\nu - a\| = 0$である.

証明: 完備より $[a_\nu] \leqq [a_0]$ なる a_0 が存在する. 適当な $[p_\mu] \downarrow 0$ 及び部分列 a_{μ_ν} に対し $\lim_{\nu\to\infty}([a_0] - [p_\mu])a_{\mu_\nu} = ([a_0] - [p_\mu])a$ が成立する. 故に $\lim_{\nu\to\infty}\|([a_0] - [p_\mu])(a_\nu - a)\| = 0$ 若しも $\varepsilon > 0$に対し 如何なる μに対しても $\|[p_\mu]a_{\mu}\| \geqq \varepsilon$ なる μ_ν が存在するときは, 適当な $\delta >$に対し $\|a_{\mu_\nu}\| \geqq \delta + \|([a_0] - [p_\mu])a_{\mu_\nu}\|$ なるべきを以て, $\lim_{\nu\to\infty}\|a_{\mu_\nu}\| \geqq \|([a_0] - [p_\mu])a\| + \delta$ が得られ. 従つて $\mu\to\infty$ に対し $\lim_{\nu\to\infty}\|a_{\mu_\nu}\| \geqq \|a\| + \delta$となつて矛盾する. 故に $\|[p_\mu]a_{\mu_\nu}\|$は $\mu\to\infty$に対し, 一様に Оに収斂する. 又

$\| (a_{\mu_\nu}-a)\| \leqq \|([a_0]-[p_\mu])(a_{\mu_\nu}-a)\| \ \|[p_\mu]a_{\mu_\nu}\|+\|[p_\mu]a\|$
より，従って $\lim_{\nu\to\infty}\|(a_{\mu_\nu}-a)\|=0$ が得られる。即ち任意の部分列より
$\lim_{\nu\to\infty}\|a_{\mu_\nu}-a\|=0$ なる部分列 a_μ が選べるを以て，$\lim_{\nu\to\infty}\|a_\nu-a\|=0$である。

規数が完備でないときは Cantor $\mathfrak{M}$まで完備化が可能である。单調完備化に関しては次の定理が成立する。

定理．規数が半連続にして，$\mathfrak{M}$の適当な要素列 a_ν に対し $a_\nu \frown a_\mu=0$ $(\nu\neq\mu)$ にして a_ν の何れとも直交する要素が0なるときは $\mathfrak{M}\subset\widehat{\mathfrak{M}}$ にして，$\widehat{\mathfrak{M}}$にては規数が半連続且単調完備にして $\widehat{\mathfrak{M}}\ni\widehat{a}\geqq 0$ に対し $\widehat{\mathfrak{M}}\ni a_\nu\uparrow\widehat{a}$ なるa_νが存在する。

証明：$\mathfrak{M}$を含む完全なる連続線形束 $\widehat{\mathfrak{M}}$にして，$\widehat{\mathfrak{M}}\ni\widehat{a}\geqq 0$ に対し $a\ \mathfrak{M}\ni a_\nu\uparrow\widehat{a}$ なる a_ν が存在するが如き $\widehat{\mathfrak{M}}$ が存在する。(1)参照) $\sup\|a_\nu\|<\infty$ に対し $\|\widehat{a}\|=\lim_{\nu\to\infty}\|a_\nu\|$ と定義して，$\widehat{a}$の全体を$\widehat{\mathfrak{M}}$とすれば $\widehat{\mathfrak{M}}$が以上の條件を満足することが知られる。同様にして次の定理が証明される。

定理　規数が汎半連續にして$\mathfrak{M}$が汎連続なるときは $\mathfrak{M}\subset\widehat{\mathfrak{M}}$ にして，$\widehat{\mathfrak{M}}$にては規数が汎半連続且汎単調完備にして $\widehat{\mathfrak{M}}\ni\widehat{a}\geqq 0$ に対し $\widehat{a}=\bigcup_\lambda a_\lambda$ なる $a_\lambda\in\mathfrak{M}$ が存在する。

(1947. 8. 29)